1. Альтернатива Фредгольма

Либо линейное операторное уравнение $Az = u$ имеет решение при любой правой части, либо сопряжённое к нему уравнение $A^* w = \theta$ имеет нетривиальное решение.

2. Базис и размерность линейного пространства.

Упорядоченная система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пр-ва V называется базисом V, если она ЛНЗ и $\forall x \in V \Rightarrow x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$. Число векторов базиса V – размерность V: $\dim V$.

3. Бесконечная норма Гёльдера для вектора

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in C^n$. при $p \geq 1$ $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ – p-нормы или нормы Гёльдера. При фиксированном x

$\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| \Rightarrow \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

4. Выражение, связывающее скалярное произведение векторов в унитарном пространстве через их координаты в ОНБ.

Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$. Тогда $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

5. Геом. и алг. кратности собств. значения линейного оператора.

Геометрическая кратность – $\dim W_{\lambda_0}$, где $W_{\lambda_0} = \{x \in V \mid Ax = \lambda_0 x\}$

Алгебраическая кратность – кратность λ_0 как корня характеристического многочлена.

6. Дополнительное подпространство

Пусть L — линейное подпространство пр-ва V. Подпространство L^{δ} — дополнительное подпр-во к L, если $L \oplus L^{\delta} = V$

7. Евклидова норма матрицы

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ (также норма Фробениуса)

8. Закон инерции квадратичных форм

Положительный и отрицательный индексы инерции вещественной квадратичной формы не зависят от выбора канонического базиса.

9. Изометрия.

Евклидовы пр-ва E_1 и E_2 (унитарные пр-ва U_1 и U_2) называются изоморфными, если существует биективное отображение $\varphi: E_1 \to E_2$ ($U_1 \to U_2$), которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение. При этом отображение φ называют изометрией.

10. Изоморфизм линейных пространств

Два линейных пр-ва V_1 и V_2 над общим полем P называются изоморфными, если существует биективное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции. При этом отображение φ называют изоморфизмом линейных пр-в.

11. Инвариантное подпространство.

Пусть V — линейное пр-во над полем P и $A \in L(V,V)$. Линейное подпространство L пр-ва V называется инвариантным относительно оператора A, если $\forall x \in L \Rightarrow Ax \in L$.

12. Индуцированная норма (подчинённая, операторная)

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0}\frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1}\|Ax\|_W$$

13. Канонический вид матрицы ортогонального оператора.

$$U_e = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \begin{matrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{matrix} & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \begin{matrix}\cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k\end{matrix} \end{bmatrix}$$

14. Квадратичная форма в вещественном пространстве

Пусть $A(x,y)$ — симметричная билинейная форма в пр-ве V над полем P. Квадратичной формой называется отображение $A: V \to P$, которое $\forall x \in V$ ставит в соответствие число $A(x,x)$

15. Корневой вектор линейного пространства.

Вектор $x \in V$ называется корневым вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ_j, если $(A - \lambda_j I)^k x = 0$, $k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0$

16. Критерий евклидовости нормы

Норма является евклидовой <=> для ∀f и g из нормы выполняется тождество параллелограмма:

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad \forall x, y \in V$

17. Критерий изометрии евклидовых пространств

Два евклидовых пространства E_1 и E_2 изоморфны <=> $\dim E_1 = \dim E_2$

18. Критерий линейной зависимости системы векторов в терминах матрицы Грама

Система векторов $a_1, \dots, a_k$ евклидова (унитарного) пр-ва линейно зависима тогда и только тогда, когда $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$

19. Критерий нильпотентности линейного оператора.

В комплексном пр-ве линейный оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю.

20. Критерий нормальности оператора

Оператор, действующий в унитарном пр-ве нормален <=> ∃ ОНБ из собственных векторов этого оператора.

21. Критерий подобия матриц

Две матрицы $A, B \in C^{n\times n}$ подобны <=> их жордановы формы совпадают

22. Критерий простой структуры оператора.

Линейный оператор $A \in L(V, V)$ имеет простую структуру <=> в пр-ве V ∃ базис, в котором он имеет диагональную матрицу

23. Критерий Сильвестра

Квадратичная форма $A(x, x)$ положительно (отрицательно) определена <=> угловые миноры Δ_k, $k = \overline{1, n}$ её матрицы в произвольном базисе положительны (чередуют знаки, начиная с отрицательного).

24. Линейное аффинное многообразие

Пусть V – линейное пр-во, L – некоторое его подпр-во, $x_0 \in V$. Множество $H = \{x_0 + x \mid x \in L\}$ называется линейным аффинным многообразием пр-ва V, полученным сдвигом L на вектор x_0.

25. Линейное пространство линейных операторов, его размерность

1) ∀ операторов $A, B \in L(V, W)$ и числа $\lambda \in P$: 1) $A+B \in L(V, W)$; 2) $\lambda A \in L(V, W)$

2) Сложение операторов и умножение оператора на число является внутренним и внешним законами композиции на множестве $L(V, W)$

3) Множество $L(V, W)$ – линейное пространство над полем P

относительно введённых выше операций

4) $\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

26. Матрица Грама системы векторов.

... $a_1, \dots, a_k$ евклидова (унитарного) пр-ва называется матрица

$$G(a_1,\dots,a_k) = \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_2,a_1) & \dots & (a_k,a_1) \\ (a_1,a_2) & (a_2,a_2) & \dots & (a_k,a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_1,a_k) & (a_2,a_k) & \dots & (a_k,a_k) \end{vmatrix}$$

27. Матрица линейного оператора

Пусть $e = (e_1,\dots,e_n)$ и $f = (f_1,\dots,f_m)$ — базисы пр-в V и W

Для оператора $A \in L(V,W)$:
$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ Ae_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases}$$

Матрица оператора A в паре базисов e и f:

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

28. Невырожденный линейный оператор

Оператор $A \in L(V,V)$ называется невырожденным, если его ядро состоит только из нулевого вектора: $\ker A = \{\theta\}$

29. Неравенство Гельдера.

Пусть положительные числа p, q таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Тогда для $\forall$ комплексных чисел $x_1,\dots,x_n$ и $y_1,\dots,y_n$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

30. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Для $\forall x, y \in E(U)$: $|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$

31. Неравенство треугольника в евклидовом и унитарном пр-ве.

$$\big||x| - |y|\big| \le |x+y| \le |x| + |y|$$

32. Нильпотентный оператор

$A \in L(V,V)$ — нильпотентный, если $\exists q \in \mathbb{N}$: $A^q = O$

33. Норма вектора

V — линейное пр-во, вещественное или комплексное.

Норма в V — отображение $\|\cdot\|: V \to R$, ставящая в соответствие $\forall x \in V$ число $\|x\| \in R$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V$ и $\forall \lambda \in R(C)$

1) $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

34. Образ и ядро линейного оператора

Образ ЛО A: $\operatorname{im} A = \{y \in W \mid \exists x \in V: Ax = y\}$

Ядро ЛО A: $\ker A = \{x \in V \mid Ax = \theta\}$

35. Общий вид квадратичной формы в вещественном пр-ве

$A(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij} = a_{ji}$ или $A(x,x) = x_e^T A_e x_e$, $A_e^T = A_e$

36. Общий вид линейного функционала в конечномерном пр-ве

$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ $f(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i = f(e_i)$, $i = \overline{1,n}$

– общий вид линейного функционала f в базисе $e_1, \ldots, e_n$

37. Общий вид скалярного произведения в вещественном пр-ве

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – базис пр-ва и $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i$. Тогда

$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \sum_{j=1}^{n} y_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_j, a_i) x_i\right) = Y^* G X$, где

$G = G(a_1, \ldots, a_n)$, $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)^T$

38. Оператор простой структуры

Линейный оператор $A \in L(V,V)$ называется оператором простой структуры, если в пр-ве V $\exists$ базис из собственных векторов оператора A.

39. Определение суммы линейных подпространств

$L_1 + \ldots + L_k = \sum_{i=1}^{k} L_i = \{x = x_1 + \ldots + x_k \mid x_i \in L_i, i = \overline{1,k}\}$

40. Ортогональное дополнение к линейному подпространству

$L^\perp = \{x \in E(U) \mid x \perp L\}$

41. Подчинённая норма линейного оператора

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

42. Полярное разложение линейного оператора

$A = BU$, где B – неотрицательный, U – унитарный

43. Преобразование подобия

Квадратные матрицы A и B называются подобными, если $\exists$ невырожденная матрица Q: $A = Q^{-1} B Q$

44. Прямая сумма линейных подпространств

Сумма подпространств линейного пр-ва называется прямой суммой $(L_1 \oplus \ldots \oplus L_k)$, если разложение любого вектора в ней по слагаемым подпр-вам единственно.

45. Ранг и база системы векторов

1) Линейно независимая подсистема системы векторов, через которую линейно выражается любой вектор системы, называется базой этой системы векторов

2) Число векторов базы называется рангом системы векторов

46. Ранг и дефект линейного оператора

1) Ранг линейного оператора – размерность его образа

2) Дефект – размерность ядра

47. Размерность корневого подпространства линейного оператора в комплексном пространстве.

∀ линейного оператора A, действующего в комплексном пр-ве V с хар. мн-ном $f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}(\lambda_2-\lambda)^{m_2}\cdots(\lambda_p-\lambda)^{m_p}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ ∃ инвариантные подпространства $K_{\lambda_1},\dots,K_{\lambda_p}$: $V = K_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus K_{\lambda_p}$, $\dim K_{\lambda_j} = m_j$, $j=\overline{1,p}$

48. Самосопряжённый оператор

Линейный оператор A, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве называется самосопряжённым, если $A^* = A$

49. Скалярное произведение

Пусть V — вещественное или комплексное линейное пр-во. Отображение $(,): V\times V \to P$ называется скалярным произведением, если оно удовлетворяет аксиомам:

$\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha \in P$:

1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$; 2) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$; 3) $(x+y, z) = (x,z)+(y,z)$

4) $(x,x) \geq 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$

50. Собственное значение и собственный вектор линейного оператора

V, P Ненулевой вектор $x\in V$ называется собственным вектором оператора $A \in L(V,V)$, если $\exists \lambda \in P$: $Ax = \lambda x$. Число λ — собственное значение оператора A, соотв-щее собственному вектору x.

51. Собственное подпространство

... оператора A — множество $W_{\lambda_0} = \{x \in V \mid Ax = \lambda_0 x\}$, где λ_0 — собственное значение оператора A.

52. Соотношение для матриц билинейной формы в разл. базисах

Матрицы БФ $A(x,y)$ в базисах e и $f=eQ$ связаны: $A_f = Q^T A_e Q$

53. Соотношение для матриц квадратичной формы в различных базисах комплексного пр-ва.

см. 52.

54. Соотношение для матриц линейного оператора в разл. парах базисов

e и $t=eC$ — базисы V, f и $s=fD$ — базисы W. Тогда

$A_{st} = D^{-1}A_{fe}C$.

55. Соотношение для размерностей суммы и пересечения двух линейных подпространств

$$\dim(L_1+L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1\cap L_2)$$

56. Соотношение для спектральной нормы линейного оператора A

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_E=1}\|Ax\|_E = \sup_{(x,x)=1}\sqrt{(Ax,Ax)}$$

57. Соотношение эрмитовой конгруэнтности матриц

$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ эрмитово конгруэнтны, если ∃невырожденная Q: $B = Q^*AQ$

58. Соотношения, связывающие ядра и образы операторов и линейные подпространства пр-в V и W.

Если $A \in L(V,W)$, то $\ker A$ — лин. подпр-во пр-ва V, $\operatorname{Im} A$ — лин. подпр-во пр-ва W.

59. Сопряжённый оператор

Пусть $A \in L(V, W)$. Отображение $A^*: W \to V$ называется сопряжённым оператором к оператору A, если $(Ax, y) = (x, A^* y)$ $\forall x \in V$, $y \in W$.

60. Спектральная хар-ка положительно определённого оператора.

Самосопряжённый оператор A в унитарном (евклидовом) пр-ве положительно определён $\Leftrightarrow$ все его собственные значения $\lambda > 0$.

61. Спектральная хар-ка самосопряжённого оператора

Нормальный оператор в унитарном (евклидовом) пр-ве самосопряжён $\Leftrightarrow$ все корни его хар-кого многочлена вещественны

62. Спектральная хар-ка унитарного оператора

Нормальный оператор в унитарном пр-ве унитарен тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны единице

63. Теорема Гамильтона-Кэли

Линейный оператор, действующий в комплексном (вещественном) пр-ве является корнем своего хар-го многочлена.

64. Теорема об инвариантных подпространствах минимальной размерности для оператора, действующего в вещественном пр-ве

У всякого линейного оператора в вещественном пр-ве $\exists$ 1-мерное или 2-мерное инвариантное подпространство

65. Теорема об эквивалентности норм

В конечномерном пр-ве $\forall$ 2 нормы эквивалентны.

66. Теорема о канонической паре базисов линейного оператора

Пусть $A \in L(V, W)$, $\operatorname{rg} A = r$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда $\exists$ базисы e и f пр-тв V и W, в которых оператор A имеет матрицу $I_r \in P^{m \times n}$, в которой все эл-ты равны 0, кроме первых r диагональных эл-тов, равных 1. e и f называют канонической парой базисов.

67. Теорема о неполном базисе

В n-мерном пр-ве $\forall$ ЛНЗ систему из k, где $k < n$, векторов можно дополнить до базиса

68. Теорема о представлении линейных пространств в виде прямой суммы двух его подпространств

Если L - линейное подпр-во $E(U)$, то $L \oplus L^{\perp} = E(U)$.

69. Теорема о ранге и дефекте линейного оператора

Пусть $A \in L(V, W)$, то $\operatorname{rg} A + \operatorname{def} A = \dim V$.

70. Теорема о расщеплении линейного оператора

$\forall$ линейного оператора A, действующего в комплексном пр-ве V, с хар. многочленом $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $\exists$ инвариантные подпр-ва $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$:

$V = K_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda_p}$; $\dim K_{\lambda_j} = m_j$; $j = \overline{1,p}$;

$f_j(\lambda) = \det(A|K_{\lambda_j} - \lambda I) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j}$, $j = \overline{1,p}$.

71. Теорема о собственных векторах нормального оператора, отвечающего различным собственным значениям

Собственные вектора $x_1, \ldots, x_k$ оператора, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, линейно независимы

72. Теорема о соотношении между матрицами прямого и сопряжённого операторов.

WTF?

73. Теорема Фредгольма

Операторное уравнение $Az = u$ имеет решение $\Leftrightarrow$ его правая часть ортогональна всем решениям сопряжённого уравнения

74. Теорема Шура

$\forall$ оператора, действующего в унитарном пр-ве, существует ОНБ, в котором он имеет треугольную матрицу

75. Тождество параллелограмма

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V$$

76. Унитарный оператор

$$U^*U = UU^* = I.$$

77. Формула для вычисления координат вектора x в ОНБ

В евклидовом (унитарном) пр-ве координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора x в базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ вычисляются по правилу $x_i = (x, e_i)$, $i = \overline{1,n}$

78. Формула для вычисления расстояния от вектора до подпространства в конечномерном пространстве

Расстояние между вектором f и линейным подпр-вом L в евклидовом (унитарном) пр-ве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L